DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2018. 04. 007

比例延迟分数阶 Volterra 型方程的谱分析*

郑伟珊
（韩山师范学院数学与统计学院，广东 潮州 521041）

摘　要： 对比例延迟分数阶 Volterra 型方程进行谱分析，首先通过变量变换予以正则化，然后利用谱方法求逼近解和逼近导数，最后给出严格的误差分析并获得方程在 L^∞ 和 $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}$ 空间中真解与逼近解以及精确导数与逼近导数之间的误差呈指数收敛的结论。

关键词： 谱分析；比例延迟；分数阶；Volterra 方程

中图分类号： O242. 2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529 – 6579（2018）04 – 0056 – 06

Spectral analysis for fractional Volterra equation with ratio delay

ZHENG Weishan
（College of Mathematics and Statistics，Hanshan Normal University，Chaozhou 521041，China）

Abstract： A spectral collocation method is provided for the fractional Volterra equation with ratio delay. By variable transformation and Jacobi discretization，a rigorous convergence analysis is proposed. The conclusion that the error of the approximate solution and approximate derivative decay exponentially both in L^∞ space and $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}$ space are obtained.

Key words： spectral analysis；ratio delay；fractional order；Volterra equation

Volterra 型方程作为数学模型出行在许多应用领域中，如通信系统[1]，水文模型[2]，生物种群问题[3]等等。然而早期关于该类方程的研究都是理论分析居多，随着社会经济的发展，科学研究逐步深入，由实际问题导出的模型越来越复杂，呼吁着高效分析方法的产生。关于 Volterra 型方程收敛性分析，受到广泛的关注[4-13]，如线性多步法[4]，逐片多项式法[5]，HP 间断 Galerkin 法[6]，谱配置法[8-11]，其中谱配置法具有高效的指数收敛速度已被大量应用于解决各类整数阶 Volterra 方程，这里仅列举各类方程的一个代表：积分方程[8]、微积分程[9]、弱奇异核方程[10]、非线性方程[11]，其中包含延迟的情形[8-10]，然而这些都是整数阶情形，该类方程的分数阶类型研究不多[12-13]，而分数阶微积分方程因更好地刻画和描述了自然现象、动态系统的变化过程近几年来得到了广泛的应用[14-16]，故本文在已有整数阶 Volterra 方程研究的基础上将其推广至被积函数带比例延迟的分数阶情形，方程形式如下

$$\begin{cases} D^\zeta H(x) - H(x) - \int_0^x K(x,s)H(\rho s)\,\mathrm{d}s = G(x), \\ \qquad x \in [0,X] \\ H(0) = H_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 G 与 K 为已知足够光滑的函数，$0 < \rho,\zeta < 1$，$H(x)$ 未知且 H_0 是已知常数，D^ζ 表示 ζ 阶 Caputo 分数阶导数，在本文具体为

$$D^\zeta H(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)}\int_0^x \frac{H'(s)}{(x-s)^\zeta}\mathrm{d}s \tag{2}$$

相应的 Riemann-Liouville 分数阶积分为

$$I^\zeta H(x) = \frac{1}{\Gamma(\zeta)}\int_0^x (x-s)^{\zeta-1}H(s)\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

* **收稿日期：** 2018 – 02 – 06
基金项目： 国家自然科学基金（11626074）；韩山师范学院项目（2017HJGJCJY009，Z16027，201404）
作者简介： 郑伟珊（1983 年生），女；**研究方向：** 基础数学；E-mail：weishanzheng@ yeah. net

$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。方程（1）的初始条件结合式（2）和式（3）可以得到

$$H(x)-H(0)=\frac{1}{\Gamma(\zeta)}\int_0^x (x-s)^{\zeta-1}D^{\zeta}H(s)\mathrm{d}s \tag{4}$$

为了进行谱分解，必须对式（1）和式（4）进行变量代换，令

$$x=\frac{X}{2}(1+t),s=\frac{X}{2}(1+\tau)$$

倘若记

$$h(t)=H(\frac{X}{2}(1+t)),g(t)=G(\frac{X}{2}(1+t)),$$

$$\hat{K}(t,\tau)=\frac{X}{2}K(\frac{X}{2}(1+t),\frac{X}{2}(1+\tau))$$

则

$$D^{\zeta}h(t)-h(t)-\int_{-1}^{t}\hat{K}(t,\tau)h(\rho\tau+\rho-1)\mathrm{d}\tau=g(t) \tag{5}$$

$$h(t)-h(-1)=\frac{1}{\Gamma(\zeta)}(\frac{T}{2})^{\zeta}\int_{-1}^{t}(t-\tau)^{\zeta-1}D^{\zeta}h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

其中 $t\in[-1,1]$，令 $-\mu=\zeta-1$，$\{t_i\}_{i=0}^N$ 表示一组配置点，它是 $N+1$ 个 Jacobi-Gauss 点，相应的权记为 $\omega^{\alpha,\beta}$，则方程（5）和方程（6）在配置点 t_i 上显然成立

$$D^{\zeta}h(t_i)-h(t_i)-\int_{-1}^{t_i}\hat{K}(t_i,\tau)h(\rho\tau+\rho-1)\mathrm{d}\tau=g(t_i) \tag{7}$$

$$h(t_i)-h(-1)=\frac{1}{\Gamma(\zeta)}(\frac{T}{2})^{\zeta}\int_{-1}^{t_i}(t_i-\tau)^{-\mu}D^{\zeta}h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

为了获得更高的精度，需进行适当的线性变换，为此令

$$\tau(t,\theta)=\frac{1+t}{2}\theta+\frac{t-1}{2} \tag{9}$$

其中 $-1\leqslant\theta\leqslant1$，若记

$$k(t,\tau(t,\theta))=\frac{1+t}{2}\hat{K}(t,\tau(t,\theta))$$

则方程（7）和方程（8）可以重记为

$$D^{\zeta}h(t_i)-h(t_i)-\int_{-1}^{1}k(t_i,\tau(t_i,\theta))h(\rho\tau(t_i,\theta)+\rho-1)\mathrm{d}\theta=g(t_i) \tag{10}$$

$$h(t_i)-h(-1)=\frac{T^{\zeta}}{\Gamma(\zeta)}(\frac{1+t_i}{4})^{\zeta}\int_{-1}^{1}(1-\theta)^{-\mu}D^{\zeta}h(\tau(t_i,\theta))\mathrm{d}\theta \tag{11}$$

下面进行谱逼近，首先对于式（10），用 Legendre-Gauss 积分法则进行近似计算，权为 $\{\omega_l\}_{l=0}^N$，即 Jacobi 权 $\{\omega_l^{0,0}\}_{l=0}^N$，则

$$D^{\zeta}h(t_i)-h(t_i)-\sum_{l=0}^{N}k(t_i,\tau(t_i,\theta_l))h(\rho\tau(t_i,\theta_l)+\rho-1)\omega_l\approx g(t_i)$$

其中 $\{\theta_l\}_{l=0}^N$ 是一组 Legendre-Gauss 点，相应（11）可近似为

$$h(t_i)-h(-1)\approx\frac{T^{\zeta}}{\Gamma(\zeta)}(\frac{1+t_i}{4})^{\zeta}\sum_{l=0}^{N}D^{\zeta}h(\tau(t_i,\tilde{\theta}_l))\omega_l^{-\mu,0}$$

其中 $\{\tilde{\theta}_l\}_{l=0}^N$ 是一组 Jacobi-Gauss 点，相应的权为 $\{\omega_l^{-\mu,0}\}_{l=0}^N$。

记

$$h_i\approx h(t_i),D^{\zeta}h_i\approx D^{\zeta}h(t_i),$$

$$F(t)=\sum_{i=0}^{N}h_iF_i(t),D^{\zeta}F(t)=\sum_{i=0}^{N}D^{\zeta}h_iF_i(t)$$

其中 $F_i(t)$（$0\leqslant i\leqslant N$）是以 Jacobi-Gauss 点 $\{t_i\}_{i=0}^N$ 为插值点的 Lagrange 插值基函数，谱配置方法即寻求 $F(t)$，$D^{\zeta}F(t)$ 使得满足如下方程

$$D^{\zeta}h_i-h_i-\sum_{l=0}^{N}k(t_i,\tau(t_i,\theta_l))\cdot F(\rho\tau(t_i,\theta_l)+\rho-1)\omega_l=g(t_i) \tag{12}$$

$$h_i-h(-1)=\frac{T^{\zeta}}{\Gamma(\zeta)}(\frac{1+t_i}{4})^{\zeta}\int_{-1}^{1}(1-\theta)^{-\mu}D^{\zeta}F(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

注 1　$D^{\zeta}F(t)=\sum_{i=0}^{N}D^{\zeta}h_iF_i(t)\in P_N$，

$$\sum_{l=0}^{N}D^{\zeta}F(\tau(t_i,\tilde{\theta}_l))\omega_l^{-\mu,0}=\int_{-1}^{1}(1-\theta)^{-\mu}D^{\zeta}F(\tau)\mathrm{d}\tau$$

另外，以下篇幅 C 表示与 N 无关正的常数，$h\in H^m_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$，$m\geqslant1$，$\alpha,\beta>-1$，$\gamma=\max\{\alpha,\beta\}$。

1　若干引理

引理 1[17]　假设用带 Jacobi 权 $N+1$ 个点的 Gauss 积分公式计算 $h\varphi$ 的积分，$\varphi\in P_N$，则

$$|(h,\varphi)_{\omega^{\alpha,\beta}}-(h,\varphi)_N|\leqslant CN^{-m}|h|_{H^{m,N}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}\|\varphi\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}$$

其中

$$|h|_{H^{m,N}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}=(\sum_{j=\min(m,N+1)}^{m}\|\partial_t^jh\|^2_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)})^{\frac{1}{2}},$$

$$(h,\varphi)_N=\sum_{j=0}^{N}h(t_j)\varphi(t_j)\omega_j \tag{14}$$

引理 2[10,18]　I_Nh 表示以 $N+1$ 个权为 $\omega^{\alpha,\beta}$ 的 Jacobi-Gauss 点 $\{t_i\}_{i=0}^N$ 为插值基点的插值多项式，即 $I_Nh=\sum_{i=0}^{N}h(t_i)F_i(t)$，则

$$\|I_N\|_{L^\infty(I)} \leqslant \max_{t\in[-1,1]}\sum_{i=0}^{N}|F_i(t)| = \begin{cases} O(\log N), & -1<\alpha,\beta\leqslant -\dfrac{1}{2},\\ O(N^{\frac{1}{2}+\gamma}), & 其它情形 \end{cases} \quad (15)$$

且

$$\|h-I_Nh\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)} \leqslant CN^{-m}|h|_{H^{m,N}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)} \quad (16)$$

$$\|h-I_Nh\|_{L^\infty(I)} \leqslant \begin{cases} CN^{\frac{1}{2}-m}\log N|h|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & -1<\alpha,\beta\leqslant -\dfrac{1}{2}\\ CN^{1+\gamma-m}|h|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & 其它情形 \end{cases} \quad (17)$$

引理 3[19-20] 对于一个非负整数 r 和 $\kappa\in[0,1]$，存在一个常数 $C_{r,\kappa}>0$，使得对于任意函数 $v\in C^{r,\kappa}([-1,1])$ 都存在一个多项式函数 $T_Nv\in P_N$，有

$$\|v-T_Nv\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_{r,\kappa}N^{-(r+k)}\|v\|_{r,\kappa}$$

其中 $\|\cdot\|_{r,\kappa}$ 是 $C^{r,\kappa}([-1,1])$ 空间的标准范数，而 T_N 是一个从 $C^{r,\kappa}([-1,1])$ 映到 P_N 的线性算子。

引理 4[21] $\kappa\in[0,1]$，$0\leqslant\kappa<1-\mu$，定义 $\tilde{k}$：

$$\tilde{k}v(t) = \int_{-1}^{t}(t-\tau)^{-\mu}k(t,\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

则对于任意函数 $v\in C([-1,1])$，都存在一个正的常数 C 使得

$$\frac{|\tilde{k}v(t')-\tilde{k}v(t'')|}{|t'-t''|^{\kappa}} \leqslant C\max_{t\in[-1,1]}|v(t)|$$

这里 t'、$t''\in[-1,1]$ 且 $t'\neq t''$，这意味着 $\|\tilde{k}v\|_{0,\kappa}\leqslant C\max\limits_{t\in[-1,1]}|v(t)|$。

引理 5[22] 对所有可测函数 $f\geqslant 0$，当 $1<p\leqslant q<\infty$ 时，都有如下广义 Hardy 不等式

$$\left(\int_a^b|(Tf)(t)|^q h(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_a^b|f(t)|^p v(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

成立当且仅当

$$\sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, p' = \frac{p}{p-1}$$

这里的函数 T 是一个算子

$$(Tf)(t) = \int_a^t k(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中函数 $k(t,\tau)$ 是一个给定的核函数，u 和 v 都是非负的权函数且 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$。

引理 6[23] 对于每个有界函数 v，有

$$\sup_N\left\|\sum_{i=0}^{N}v(t_i)F_i(t)\right\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)} \leqslant C\max_{t\in[-1,1]}|v(t)|$$

2 结 论

定理 1 令 $h(t)$ 是方程（5）－（6）的解，并假定足够光滑，若 $D^\zeta F(t)$ 是通过谱方法由方程（12）和方程（13）获得的逼近解及逼近导数，$0\leqslant\zeta<1$，其误差函数为 $D^\zeta e(t)=D^\zeta F(t)-D^\zeta h(t)$，则当 N 足够大有

$$\|D^\zeta e(t)\|_{L^\infty(I)} \leqslant \begin{cases} CN^{-m}\log N\left(\max\limits_{t\in[-1,1]}|k(t,\tau(t,\theta))|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)}\|h\|_{L^2(I)}+N^{\frac{1}{2}}\Omega\right), & -1<\alpha,\beta\leqslant -\dfrac{1}{2},\\ CN^{\gamma+\frac{1}{2}-m}\left(\max\limits_{t\in[-1,1]}|k(t,\tau(t,\theta))|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)}\|h\|_{L^2(I)}+N^{\frac{1}{2}}\Omega\right), & 其它情形 \end{cases}$$

$$\|D^\zeta e(t)\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)} \leqslant \begin{cases} CN^{-m}(V_1+N^{-\kappa}\log NV_2+V_3+N^{\frac{1}{2}-\kappa}\log N\Omega), & -1<\alpha,\beta\leqslant -\dfrac{1}{2},\\ CN^{-m}(V_1+N^{\gamma-\frac{1}{2}-\kappa}V_2+V_3+N^{\gamma-\kappa}\Omega), & 其它情形 \end{cases}$$

这里

$$\Omega = |D^\zeta h|_{H^{m,M}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}+|h|_{H^{m,M}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)},$$

$$V_1 = \max_{t\in[-1,1]}|\hat{K}(t,\tau)|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)}\cdot\left(\|h\|_{L^2(I)}+|D^\zeta h|_{H^{1,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}+|h|_{H^{1,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}\right),$$

$$V_2 = \max_{t\in[-1,1]}|\hat{K}(t,\tau)|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)}\|h\|_{L^2(I)},$$

$$V_3 = |D^\zeta h|_{H^{m,N}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}+|h|_{H^{m,N}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}$$

证明 利用离散内积记号（14）可以把方程（12）重记为

$$D^\zeta h_i-h_i-(k(t_i,\tau),F(\rho\tau+\rho-1))_N = g(t_i)$$

若记

$$J(t) = (k(t,\tau),F(\rho\tau+\rho-1))_N-(k(t,\tau),F(\rho\tau+\rho-1))_{\omega^{0,0}}$$

则还可将上式记为

$$D^\zeta h_i-h_i-(k(t_i,\tau),F(\rho\tau+\rho-1))_{\omega^{0,0}}-J(t_i) = g(t_i) \quad (18)$$

再由式（9）知，式（18）和式（13）分别可以化为

$$D^\zeta h_i-h_i-\int_{-1}^{t_i}\hat{K}(t_i,\tau)F(\rho\tau+\rho-1)\mathrm{d}\tau-J(t_i) = g(t_i) \quad (19)$$

$$h_i-h(-1) =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\zeta)}\left(\frac{T}{2}\right)^{\zeta}\int_{-1}^{t_i}(t_i-\tau)^{-\mu}D^{\zeta}F(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{20}$$

式（19）和式（20）分别减去式（7）和式（8），然后两边同乘以 $\sum_{i=0}^{N}F_i(t)$ 得

$$D^{\zeta}e(t)=e(t)+\int_{-1}^{t}\hat{K}(t,\tau)e(\rho\tau+\rho-1)\,\mathrm{d}\tau+\sum_{j=1}^{4}I_j(t) \tag{21}$$

$$e(t)=\frac{1}{\Gamma(\zeta)}\left(\frac{T}{2}\right)^{\zeta}\int_{-1}^{t}(t-\tau)^{-\mu}D^{\zeta}e(\tau)\,\mathrm{d}\tau+I_2(t)+I_5(t) \tag{22}$$

这里

$$I_1(t)=\sum_{i=0}^{N}J(t_i)F_i(t),\quad I_2(t)=h(t)-I_Nh(t),$$

$$I_3(t)=I_ND^{\zeta}h(t)-D^{\zeta}h(t),$$

$$I_4(t)=I_N\int_{-1}^{t}\hat{K}(t,\tau)e(\rho\tau+\rho-1)\,\mathrm{d}\tau-\int_{-1}^{t}\hat{K}(t,\tau)e(\rho\tau+\rho-1)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$I_5(t)=\frac{1}{\Gamma(\zeta)}\left(\frac{T}{2}\right)^{\zeta}\cdot\left(I_N\int_{-1}^{t}(t-\tau)^{-\mu}D^{\zeta}e(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\int_{-1}^{t}(t-\tau)^{-\mu}D^{\zeta}e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

根据 Dirichlet 公式

$$\int_{-1}^{t}\int_{-1}^{\tau}\Phi(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau=\int_{-1}^{t}\int_{\xi}^{t}\Phi(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi$$

得

$$|D^{\zeta}e(t)|\leqslant|e(t)|+C_1\int_{-1}^{t}|D^{\zeta}e(\rho\xi+\rho-1)|\,\mathrm{d}\xi+C_1\sum_{j=1}^{5}|J_j(t)| \tag{23}$$

其中 C_1 是正的常数，而

$$\int_{-1}^{t}|D^{\zeta}e(\rho\xi+\rho-1)|\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\rho}\int_{-1}^{\rho t+\rho-1}|D^{\zeta}e(z)|\,\mathrm{d}z<\frac{1}{\rho}\int_{-1}^{t}|D^{\zeta}e(z)|\,\mathrm{d}z$$

因为 $0<\rho<1,\rho t+\rho-1=\rho(t+1)-1<t$，故由 Gronwall 不等式知

$$\|D^{\zeta}e(t)\|_{L^\infty(I)}\leqslant C\left(\|e(t)\|_{L^\infty(I)}+\sum_{j=1}^{5}\|I_j(t)\|_{L^\infty(I)}\right) \tag{24}$$

再由式（22）有

$$\|e(t)\|_{L^\infty(I)}\leqslant C\left(\|D^{\zeta}e(t)\|_{L^\infty(I)}+\sum_{j=2,5}\|I_j\|_{L^\infty(I)}\right) \tag{25}$$

综上得

$$\|D^{\zeta}e(t)\|_{L^\infty(I)}\leqslant C\sum_{j=1}^{5}\|I_j\|_{L^\infty(I)} \tag{26}$$

下面对 $\|I_j\|_{L^\infty(I)}j=1,\cdots,5$ 进行误差估计，首先由引理 1 结论知

$$|J_i(t)|\leqslant CN^{-m}\max_{t\in[-1,1]}|\hat{K}(t,\tau)|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)}\|F\|_{L^2(I)}\leqslant CN^{-m}\max_{t\in[-1,1]}|\hat{K}(t,\tau)|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)}(\|h\|_{L^2(I)}+\|e\|_{L^\infty(I)})$$

再利用引理 2 的式（15），有

$$\|I_1\|_{L^\infty(I)}\leqslant\begin{cases}C\log N\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}|J_i|, & -1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2};\\ CN^{\frac{1}{2}+\gamma}\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}|J_i|, & \text{其它情形}\end{cases}\leqslant$$

$$\begin{cases}CN^{-m}\log N\max\limits_{t\in[-1,1]}|\hat{K}(t,\tau)|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}}(\|h\|_{L^2(I)}+\|e\|_{L^\infty(I)}), & -1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2};\\ CN^{\frac{1}{2}+\gamma-m}\max\limits_{t\in[-1,1]}|\hat{K}(t,\tau)|H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(\|h\|_{L^2(I)}+\|e\|_{L^\infty(I)}), & \text{其它情形}\end{cases} \tag{27}$$

又由引理 2 的式（17）有

$$\|I_2\|_{L^\infty(I)}\leqslant\begin{cases}CN^{\frac{1}{2}-m}\log N|h|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & -1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2};\\ CN^{1+\gamma-m}|h|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & \text{其它情形}\end{cases} \tag{28}$$

$$\|I_3\|_{L^\infty(I)}\leqslant\begin{cases}CN^{\frac{1}{2}-m}\log N|D^{\zeta}h|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & -1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2};\\ CN^{1+\gamma-m}|D^{\zeta}h|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & \text{其它情形}\end{cases} \tag{29}$$

再次利用引理 2 中的式（17），令 $m=1$，有

$$\|I_4\|_{L^\infty(I)}\leqslant\begin{cases}CN^{-\frac{1}{2}}\log N\left|\int_{-1}^{t}\hat{K}(t,\tau)e(\rho\tau+\rho-1)\,\mathrm{d}\tau\right|_{H^{1,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(-1,1)}, & -1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2};\\ CN^{\gamma}\left|\int_{-1}^{t}\hat{K}(t,\tau)e(\rho\tau+\rho-1)\,\mathrm{d}\tau\right|_{H^{1,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(-1,1)}, & \text{其它情形}\end{cases}\leqslant$$

$$\begin{cases}CN^{-\frac{1}{2}}\log N\|e\|_{L^\infty(I)}, & -1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2},\\ CN^{\gamma}\|e\|_{L^\infty(I)}, & \text{其它情形}\end{cases} \tag{30}$$

现估计 $J_5(t)$，根据引理4 令 $k(t,\tau)=\frac{1}{\Gamma(\zeta)}(\frac{T}{2})^{\zeta}$，同时利用引理2、引理3，有

$$\begin{aligned}&\|I_5\|_{L^\infty(I)}=\|(I_N-I)\tilde{k}D^{\zeta}e\|_{L^\infty(I)}=\\&\|(I_N-I)(\tilde{k}D^{\zeta}e-T_N\tilde{k}D^{\zeta}e)\|_{L^\infty(I)}\leqslant\\&(1+\|I_N\|_{L^\infty(I)})CN^{-\kappa}\|\tilde{k}D^{\zeta}e\|_{0,k}\leqslant\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{cases}CN^{-\kappa}\log N\|D^{\zeta}e\|_{L^\infty(I)},\ -1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2};\\CN^{\frac{1}{2}+\gamma-\kappa}\|D^{\zeta}e\|_{L^\infty(I)},\ \text{其它情形}\end{cases}$$

最后一个不等式，在以下情况下使用引理4

$$\begin{cases}0<\kappa<1+\gamma,\ -1<\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2};\\\max\{\frac{1}{2}+\gamma,0\}<\kappa<1+\gamma,\quad\text{其它情形}\end{cases}$$

综上分析由式（27）－（31），定理第一个结论获证。下面再由式（23），利用 Gronwall 定理及引理5 有

$$\|D^{\zeta}e\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)}\leqslant C\sum_{j=1}^{5}\|I_j\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)}\tag{32}$$

由引理6 可得

$$\begin{aligned}&\|I_1\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}\leqslant C\max_{t\in[-1,1]}|J(t)|\leqslant\\&CN^{-m}\max_{t\in[-1,1]}|\hat{K}(t,\tau)|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)}(\|h\|_{L^2(I)}+\|e\|_{L^\infty(I)})\end{aligned}\tag{33}$$

再由引理2 的式（16）可以得到

$$\begin{aligned}&\|I_2\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}\leqslant CN^{-m}|h|_{H^{m,N}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)},\\&\|I_3\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}\leqslant CN^{-m}|D^{\zeta}h|_{H^{m,N}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}\end{aligned}\tag{34}$$

对于 $I_4(t)$ 的估计，使用引理2 的式（16）并令 $m=1$ 时，得

$$\begin{aligned}&\|J_4\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}\leqslant\\&CN^{-1}\left|\int_{-1}^{t}\hat{K}(t,\tau)e(\rho\tau+\rho-1)\mathrm{d}\tau\right|_{H^{1,N}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}\leqslant\\&CN^{-1}\|e\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}}\end{aligned}\tag{35}$$

对于 $I_5(t)$ 的估计，借助引理3，引理4 和引理5，且当 $\kappa\in(0,1-\mu)$ 有

$$\begin{aligned}&\|I_5\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}=\|(I_N-I)(\tilde{k}D^{\zeta}e-T_N\tilde{k}D^{\zeta}e)\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)}\leqslant\\&\|I_N(\tilde{k}D^{\zeta}e-T_ND^{\zeta}e)\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}+\\&\|(\tilde{k}D^{\zeta}e-T_ND^{\zeta}e)\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)}\leqslant\\&C\|(\tilde{k}D^{\zeta}e-T_ND^{\zeta}e)\|_{L^\infty(I)}\leqslant\\&CN^{-\kappa}\|\tilde{k}D^{\zeta}e\|_{0,k}\leqslant CN^{-\kappa}\|D^{\zeta}e\|_{L^\infty(I)}\end{aligned}\tag{36}$$

式（33）与式（36）利用定理第一个结论，令 $m=1$ 即可得定理第二个结论。

参考文献：

[1] 张永生，李道本. 多径衰落信道的 Volterra 自适应预测[J]. 通信学报，1997，18(10)：70－74.
ZHANG Y S，LI D B. Volterra adaptive prediction of the multipath fading channel [J]. Journal of China Institute of Communications，1997，18(10)：70－74.

[2] 康玲，王乘，姜铁兵. Volterra 神经网络水文模型及应用研究[J]. 水力发电学报，2006，25(5)：22－26.
KANG L，WANG C，JIANG T B. Hydrologic model of Volterra neural network and its application [J]. Journal of Hydroelectric Engineering，2006，25(5)：22－26.

[3] 史超，谭杨，郭子君. 基于比率依赖的两种群捕食者—食饵系统的随机模型的渐近性质[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2013，52(3)：67－72.
SHI C，TAN Y，GUO Z J. Asymptotic behavior of a stochastic models on perdator-prey system of two species with ratio-dependence [J]. Acta Scientiarum Naturaliun Universitatis Sunyatseni，2013，52(3)：67－72.

[4] LUBICH C. Fractional linear multi-step methods for Abel-Volterra integral equations of the second kind [J]. Math Comp，1985，45(172)：463－469.

[5] BRUNNER H，PEDAS A，VAINIKKO G. Piecewise polynomial collocation methods for linear Volterra integro-differential equations with weakly singular kernels [J]. SIAM J Numer Anal，2001，39(3)：957－982.

[6] BRUNNER H，SCHÖTZAU D. hp-discontinuous Galerkin time-stepping for Volterra integro-differential equations [J]. SIAM J Numer Anal，2006，44(1)：224－245.

[7] 贾现正，冯兆永. 反热源问题及其数值计算[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2010，49(6)：6－10.
JIA X Z，FENG Z Y. Inverse source problem and its numerical computation [J]. Acta Scientiarum Naturaliun Universitatis Sunyatseni，2010，49(6)：6－10.

[8] 郑伟珊. 带线性延迟的 Volterra 积分方程研究[J]. 湖南师范大学自然科学学报. 2017，40(4)：83－88.
ZHENG W S. Studies on the Volterra integral equation with linear delay [J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University，2017，40(4)：83－88.

[9] ALI I. Convergence analysis of spectral methods for integro-differential equations with vanishing proportional delays [J]. J Comput Math，2010，28：962－973.

[10] SHI X L, CHEN Y P. Spectral-collocation method for Volterra delay integro-differential equations with weakly singular kernels [J]. Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 2016,8(4): 648 – 669.

[11] SHOJA A, VAHIDI A R, BABOLIAN E. A spectral iterative method for solving nonlinear singular Volterra integral equations of Abel type [J]. Applied Numerical Mathematics, 2017, 112: 79 – 90.

[12] YANG Y, CHEN Y P, HUANG Y Q. Convergence analysis of the Jacobi spectral-collocation method for fractional integro-differential equations [J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34B (3): 673 – 690.

[13] 郑伟珊. 带非线性延迟项的分数阶微分积分方程收敛性分析[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2018, 57(1): 55 – 62.
ZHENG W S. Convergence analysis for fractional integral and differential equation with nonlinear delay [J]. Acta Scientiarum Naturaliun Universitatis Sunyatseni, 2018, 57(1): 55 – 62.

[14] MEERSCHAERT M M, SCALAS E. Coupled continuous time random walks in finance [J]. Physica A, 2006, 370(1): 114 – 118.

[15] LANGLANDS T A M, HENRY B I, WEARNE S L. Fractional cable equation models for anomalous electro diffusion in nerve cells: infinite domain solutions [J]. Journal of Mathematical Biology, 2009, 59(6): 761 – 808.

[16] 王瑞萍, 皮佑国. 基于分数阶 PD 速度控制器的永磁同步电动机控制研究[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(3):34 – 39.
WANG R P, PI Y G. Research on Fractional-order PD speed controller for PMSM [J]. Acta Scientiarum Naturaliun Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(3): 34 – 39.

[17] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONI A, et al. Spectral methods fundamentals in single domains [M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

[18] MASTROIANNI G, OCCORSIO D. Optimal systems of nodes for Lagrange interpolation on bounded intervals. A survey [J]. J Comput Appl Math, 2001, 134(1): 325 – 341.

[19] RAGOZIN D L. Polynomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces [J]. Trans Amer Math Soc, 1970, 150(1): 41 – 53.

[20] RAGOZIN D L. Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces [J]. Trans Amer Math Soc, 1971, 162: 157 – 170.

[21] COLTON D, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory [M]// Applied mathematical sciences. 2nd ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

[22] KUFNER A, PERSSON L E. Weighted inequalities of hardy type [M]. New York: World Scientific, 2003.

[23] NEVAI P. Mean convergence of Lagrange interpolation: III [J]. Trans Amer Math Soc, 1984, 282: 669 – 698.